

単胴船に作用する6自由度のFroude-Krylov力の簡易算式の開発

松井 貞興*, 篠本 恭平**, 杉本 圭**, 芦田 晋作***

1. はじめに

船舶の設計において、波浪中の船体運動は乗船者の安全性や乗心地、船体構造設計のための波浪荷重、推進性能における波浪中抵抗増加など、多様な観点においてその高精度な推定が求められている。今日では、波浪中の船体運動をストリップ法や3次元パネル法等の耐航性ツールによって合理的に推定することができ、これらのツールは設計現場において実用に供されている。一方で、船体運動を数値解析に依らない簡易手法によって推定する事にも高い需要が存在する。例えば、構造強度評価のための波浪荷重推定では、船殻構造設計の工数上、個船毎に波浪荷重解析を実施する事のハードルが高く、鋼船規則であるCSR(Common Structural Rules)¹⁾では波浪荷重は船舶の主要パラメータを用いた簡易算式によって規定されている。またIMOの復原性基準²⁾においても、同様の理由で、横揺れの有効波傾斜係数や減衰力を簡易推定法によって求めたうえで安全性の判定を行うことが要求されている。

一般に、簡易推定法の“簡便さ”と“推定精度ならびに適用範囲”はトレードオフの関係にある。シリーズ計算の結果に対するフィッティングによって算式開発を行った場合、採用したサンプルデータから外れた対象に対する精度の保証は難しくなる。例えば、現状のCSR¹⁾において規定される船体運動ならびに加速度の算式は、同規則の適用船であるばら積み船と油タンカーのシリーズ計算に対するフィッティングによって決定されたもので、簡便ではあるが想定されていない船種やサイズの船舶に用いるには適さないものである。他方で、IMOの復原性基準²⁾において規定される有効波傾斜係数の推定式は、船体の横断面毎の形状情報を要するものであり、厳密性は高いがその分簡便さには欠く。これらに対し、“簡便さ”と“推定精度ならびに適用範囲”を両立することは、物理的考察に基づき、支配的因子を抽出し、その影響を調べ、最後に簡易化を行うという手順を踏むことで実現できると著者らは

考える。

以上を受け、本研究では、任意の船種及びサイズの単胴船の波浪中運動を簡易に推定することを目的に、物理的考察に基づく線形のFroude-Krylov力の簡易算式の開発を行う。目的を同じくする過去の研究としてJensenによる研究³⁾が挙げられるが、 $L \times B \times d$ の均一な箱船に対するストリップ法の定式化に立脚しており、船体形状の肥瘦の影響はいくつかの船舶に合うように係数処理によって考慮されている。これに対し本研究では、瘦せ型船型から肥大船型までのあらゆる船種を対象とするために、船舶の主要寸法やファインネス係数等の船型パラメータを適切に考慮した算式の開発を行う。開発した算式の推定精度を検証するため、77隻×2積付条件の実船型を用いて、線形の3次元耐航性プログラムによってあらゆる波向き、波長のFroude-Krylov力を計算し、比較を行った。

本論文ではFroude-Krylov力の算式開発に限定しているが、Froude-Krylov力は船体に作用する流体力のうち主要な成分を占め、この成分を陽な式で示すことはそれだけで完結した意義を持つ。その重要度は運動モードによって異なり、heave及びpitchについては、Froude-Krylov力は長波長域でleading termとなる主要成分である^{4) 5)}が、運動が大きくなる波長域ではradiation/scattering流体力も重要となる。これに対し、rollやsurgeについてはFroude-Krylov力が運動に対して特に支配的であることが知られている。Rollに関しては、scattering流体力とsway起因のradiation流体力が相殺するため、波浪強制力にFroude-Krylovモーメントのみを用いた一自由度運動方程式によって十分な精度で推定することができ^{6) 7)}、復原性基準にもその考えが採用されている²⁾。Surgeに関しては、船舶が前後に細長いため近似的にFroude-Krylov力と船体重量のみによる推定が可能で、船体表面法線ベクトルの船長方向成分を考慮しないストリップ法の多くではこの計算法が採用されている⁸⁾。本論文で提案するFroude-Krylov力の簡易算式は、これら

* 海上・港湾・航空技術研究所 海上技術安全研究所

** 船体開発部

*** 川崎重工業株式会社 (研究当時, 日本海事協会)

の運動を簡易的に推定する上で特に有効に活用されるものと考えられる。

2. 諸定義

2.1 算式に用いる船型パラメータ

本論文で算式に用いる船型パラメータは、船長 L (垂線間長 L_{pp})、全幅 B 、平均喫水 d 、方形係数 C_b ($=\nabla/LBd$: ∇ は排水容積)、水線面積係数 C_w ($=A_w/LB$: A_w は水線面積)、中央横断面面積係数 C_m 、キール上重心高さ KG 、重心基準の浮面心前後位置 x_f ($=$ 浮面心前後位置 LCF) - (重心前後位置 LCG) の8つとする。 x_f は、後述の式(18)によって定義される。また、本論文では適宜、柱形係数 C_p ($=C_b/C_m$) および堅柱形係数 C_{vp} ($=C_b/C_w$) を用いる。また別途、後述の式(19), (20)で定義される縦メタセンタ高さ GM_L および横メタセンタ高さ GM を用いた場合の算式についても開発する。

2.2 座標系及び入射波

座標系及び運動の向きの定義を図1に示す。 x, y, z 座標原点はそれぞれ重心前後位置 LCG 、センターライン、静水面高さにとる。

本論文では、線形理論に基づき規則波中の周波数応答を仮定し、複素振幅で表示する。すなわち、周期変動する量 $a(t)$ は、全て次式で定義される複素数 A によって扱う。

$$\begin{aligned} a(t) &= \Re[Ae^{i\omega_e t}] \\ &= \Re[A] \cos \omega_e t - \Im[A] \sin \omega_e t \quad (1) \\ &= |A| \cos(\omega_e t + \arg(A)) \end{aligned}$$

ここに、 ω_e は出会い波周波数であり、 $\Re[A], \Im[A], |A|, \arg(A)$ はそれぞれ複素数 A の実部、虚部、振幅、偏角を意味する。

入射波は図1の右図に示すとおり定義し、その速度ポテンシャルは波の山が船体の重心位置に達する瞬間を時刻の基準 ($t = 0$) とすると、次のように表される。

$$\phi_0 = \frac{ig\zeta_a}{\omega} e^{kz-ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (2)$$

ここに、 $g, \zeta_a, \omega, k(=\omega^2/g), \beta$ はそれぞれ重力加速度、入射波の振幅、波周波数、波数、波向きである。以降は、 $\omega/ig\zeta_a$ で無次元化された以下の単位速度ポテンシャルを用いる。

$$\varphi_0 = e^{kz-ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (3)$$

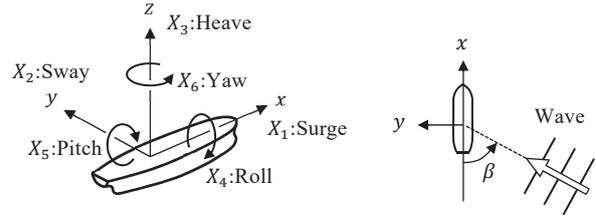


図1 Definitions of coordinate system, motion and incident wave.

2.3 Froude-Krylov力の定義と長波長域の漸近値

線形のFroude-Krylov力は、入射波の速度ポテンシャルの喫水線下の船体表面 S_H 上の積分として次式のように定義される。

$$E_i^{FK} = -\rho g \zeta_a \int_{S_H} \varphi_0 n_i dS \quad (i = 1 \sim 6) \quad (4)$$

E_i^{FK} ($i = 1 \sim 6$)はそれぞれsurge, sway, heave, roll, pitch, yaw方向のFroude-Krylov力である。式(4)の定義は、基礎流場を一樣流れと近似する場合、前進速度に依らず成り立つもので、前進速度の影響は、出会い波周波数 ω_e においてのみ表れる。式(4)において、 ρ は海水密度、 n_i ($i = 1 \sim 6$)は船体表面の外向き単位法線ベクトル $\{n_x, n_y, n_z\}^T$ を6自由度(重心まわり)に拡張したもので、次のように定義される。

$$n_i = \begin{cases} n_x & (i = 1) \\ n_y & (i = 2) \\ n_z & (i = 3) \\ yn_z - (z - z_G)n_y & (i = 4) \\ (z - z_G)n_x - xn_z & (i = 5) \\ xn_y - yn_x & (i = 6) \end{cases} \quad (5)$$

ただし、 z_G は重心の z 座標である ($z_G = KG - d$)。加えて、単位厚さの横断面に作用するsurge, sway, heave, roll方向のFroude-Krylov力(以下、断面Froude-Krylov力と呼ぶ)を、船体の横断面の外周線 $C_H(x)$ 上の積分として次式のように定義する。

$$f_i^{FK}(x) = -\rho g \zeta_a \int_{C_H(x)} \varphi_0 n_i dl \quad (i = 1 \sim 4) \quad (6)$$

このとき、 E_i^{FK} は $f_i^{FK}(x)$ を用いて次式のように表せる。

$$E_i^{FK} = \begin{cases} \int_{x_A}^{x_F} f_i^{FK}(x) dx & (i = 1 \sim 4) \\ \int_{x_A}^{x_F} -x f_3^{FK}(x) dx & (i = 5) \\ \int_{x_A}^{x_F} x f_2^{FK}(x) dx & (i = 6) \end{cases} \quad (7)$$

ここに、 x_A, x_F はそれぞれA.P.とF.P.の x 座標である。ただし、式(7)の E_5^{FK}, E_6^{FK} では、 n_x に起因する項の影響は小さいとして、無視している。

以降は、無次元化された量にover barをつけることにし、Froude-Krylov力を次のように無次元化する。

$$\bar{E}_i^{FK} = \frac{E_i^{FK}}{\rho g \zeta_a L B \varepsilon_i} \quad (i = 1 \sim 6) \quad (8)$$

$$\bar{f}_i^{FK}(x) = \frac{f_i^{FK}(x)}{\rho g \zeta_a B \varepsilon_i} \quad (i = 2 \sim 4) \quad (9)$$

ここに、 ε_i は次で定義される代表長さである。

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \sim 3) \\ B & (i = 4) \\ L & (i = 5, 6) \end{cases} \quad (10)$$

同様に、位置変数には x を L で無次元化した \bar{x} ならびに y, z をそれぞれ B で無次元化した \bar{y}, \bar{z} を用いる。

Froude-Krylov力の長波長域における漸近値は復原力に対応し、両者の整合性が運動の漸近値に影響を及ぼすことが知られている⁴⁾。ここでは、簡易算

式の長波長域における漸近値の評価のために、Froude-Krylov力の厳密な漸近値を示しておく。入射波の速度ポテンシャルの式(3)を k についてマクローリン展開し、式(4)に代入してスカラー場に対するガウスの発散定理（以下、ガウスの勾配定理と呼ぶ）を適用することで、次の表示を得る。

$$\bar{E}_1^{FK} = i \bar{k}_l \frac{dC_b}{L} + O(k^2) \quad (11)$$

$$\bar{E}_3^{FK} = C_w - i \bar{k}_l \bar{x}_f C_w - k d C_b + O(k^2) \quad (12)$$

$$\bar{E}_5^{FK} = i \bar{k}_l \frac{dC_b}{L^2} GM_L - \bar{x}_f C_w + O(k^2) \quad (13)$$

$$\bar{E}_2^{FK} = i \bar{k}_w \frac{dC_b}{B} + O(k^2) \quad (14)$$

$$\bar{E}_6^{FK} = \frac{\bar{k}_l \bar{k}_w}{L^3 B^2} \int_{V_H} (x^2 - y^2) dV + O(k^3) \quad (15)$$

$$\bar{E}_4^{FK} = -i \bar{k}_w \frac{dC_b}{B^2} GM + O(k^2) \quad (16)$$

ここに、 $O(k^n)$ はランダウの記号、 V_H は排水領域、 \bar{k}_l, \bar{k}_w はそれぞれ次で定義される船長方向、幅方向の無次元波数である。

$$\bar{k}_l = kL \cos \beta, \bar{k}_w = kB \sin \beta \quad (17)$$

式(12), (13)の変形には以下の浮面心前後位置LCFの定義を用いている。

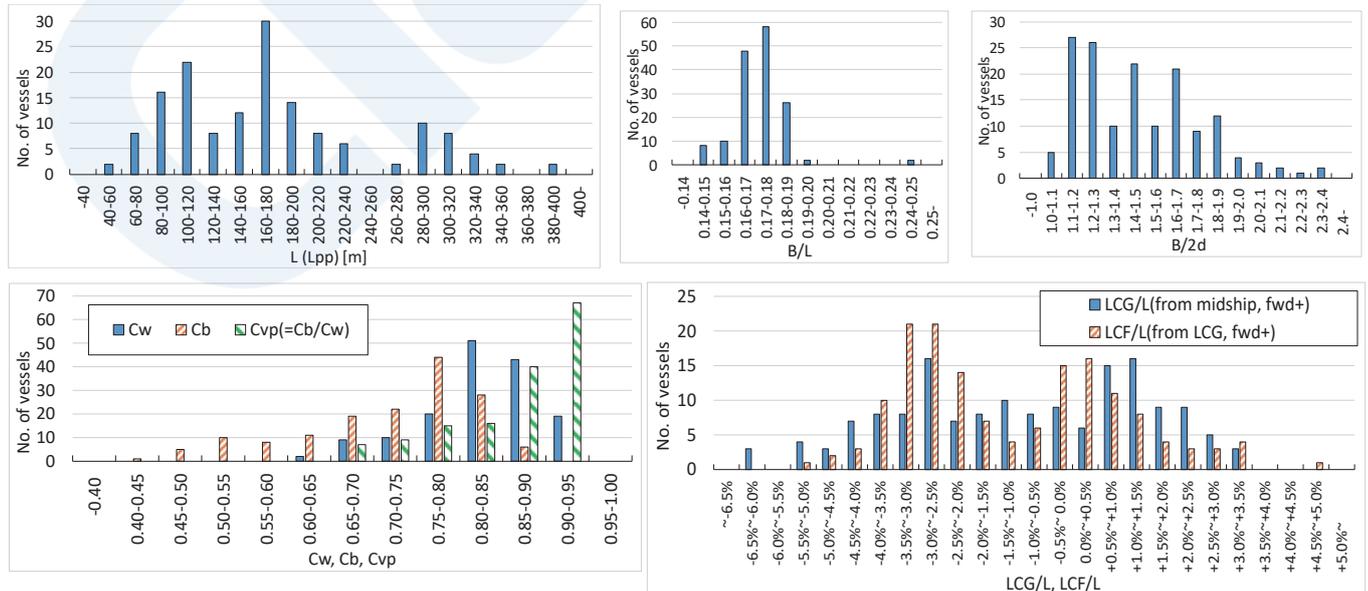


図2 Histogram of hull-form parameters of target ships.

$$\bar{x}_f = \frac{1}{C_w} \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} \bar{x} \bar{B}_w(\bar{x}) d\bar{x} \quad (18)$$

ここに、 $\bar{B}_w(\bar{x})$ は水線幅 $B_w(\bar{x})$ を B で除した値である。また、式(13)右辺の GM_L は縦メタセンタ高さ（ここでは重心まわりとして定義する）、式(16)右辺の GM は横メタセンタ高さで、それぞれ浮心高さ z_B と重心高さ z_G を用いて次のように表す。

$$GM_L = \frac{L^2}{dC_b} \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} \bar{x}^2 \bar{B}_w d\bar{x} + z_B - z_G \quad (19)$$

$$GM = \frac{B^2}{dC_b} \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} \frac{\{\bar{B}_w(\bar{x})\}^3}{12} d\bar{x} + z_B - z_G \quad (20)$$

式(19)、(20)の右辺の下線部はそれぞれ縦メタセンタ半径 BM_L 、横メタセンタ半径 BM である。

式(12)～式(16)より、Froude-Krylov力の長波長域における漸近値が復原力に対応していることが確認できる。式(12)右辺第1項はheaveの無次元復原力係数、式(13)右辺第1項の $GM_L \times dC_b/L^2$ はpitchの無次元復原力係数、式(12)、(13)右辺第2項の $-\bar{x}_f C_w$ はheave-pitch連成の無次元復原力係数、式(16)右辺第1項の $GM \times dC_b/B^2$ はrollの無次元復原力係数にあたる。

2.4 算式の精度検証のためのシリーズ計算

算式の精度検証のため、77隻×2積付条件（満載及びバラスト積付状態）の存在する船舶を用いて、日本海事協会が開発した線形の3次元耐航性プログラム⁹⁾による計算を実施した。当プログラムは一樣流れ近似に基づくもので、喫水線下の船体表面パネルから式(4)の積分によってFroude-Krylov力を計算している。一般的な商船を対象としているため、喫水線以下は左右対称かつ単胴船に限定されるが、用いた船種はばら積貨物船、油タンカー、鉱石運搬船、一般貨物船、LNG船、LPG船、コンテナ運搬船、木材チップ運搬船、自動車運搬船、RO-RO船、冷蔵貨物運搬船、セメント運搬船等、多種にわたり、図2に示す通り幅広い範囲の $L, C_w, C_b, B/L, B/2d$ をカバーしている。

本論文において算式との比較に用いた波条件は、波向き $\beta = 90^\circ$ （横波）～ 180° （向波）の 30° 刻みとし、波長は波長船長比 $\lambda/L = 0.5, 0.7, 1.0, 1.5$ とした。Rollについてはより長波長域の推定が重要となるケースも有るが、別途長波長の漸近値の評価を数式上で行っているため数値的な比較は実施していない。波向きは $\beta = 90^\circ \sim 180^\circ$ に限定しているが、左右対

称船舶に作用するFroude-Krylov力の実部と虚部は波向きに関して前後/左右対称あるいは反対称となるので、実部と虚部それぞれに対して検証を行うにあたり $\beta = 90^\circ \sim 180^\circ$ は過不足のない波向きの範囲である。なお、Froude-Krylov力は式(4)に基づいて計算されるため船速に依存しない。

3. Froude-Krylov力の簡易算式の開発

3.1 開発の基本方針

Froude-Krylov力は既知のスカラ一場の船体表面積分であるから、簡易算式の開発の要は“船体形状をどのように近似するか”にある。本研究では、Froude-Krylov力を主要な船型パラメータと波条件のみを変数に持つ初等関数で表現することを目的としているため、船体形状を船舶の主要な船型パラメータによって一意に定まるような解析的に積分可能な関数で近似する。船体形状の近似は以降の節で詳しく述べるが、算式が簡潔に、かつ積分値の評価として正しい近似となるように運動モード毎に異なる形状を選択する。特に、長波長域の漸近値が2.3節で示した厳密式に一致あるいは良い近似となるように気を付けて決定している。また、船体表面積分については、断面Froude-Krylov力 $\bar{f}_i^{FK}(\bar{x})$ を求め、それを船長方向に積分するというアプローチをとり、その際に適宜被積分関数の簡略化を行う。例えば断面Froude-Krylov力にはスミス修正係数（ $e^{-kd'(\bar{x})}$ ： $d'(\bar{x})$ は断面喫水）が現れるが、この長手方向分布を扱うと積分が煩雑あるいは不可能になるため、断面喫水 $d'(\bar{x})$ を積分値が等価になるような定数 d_e （以降等価喫水と呼ぶ）に置き換えることで被積分関数を単純化している。

3.2 Surge

\bar{E}_1^{FK} を簡易に計算する方法の出発点として、式(4)にガウスの勾配定理を適用した次の表示が用いられることが多い。

$$\begin{aligned} \bar{E}_1^{FK} &= -\frac{1}{LB} \int_{V_H} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} dV \\ &= i\bar{k}_l \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \left\{ \int_{A_H(\bar{x})} e^{kz - ik_y \sin \beta} \frac{dy dz}{LB} \right\} d\bar{x} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 $A_H(\bar{x})$ は喫水線下の横断面である。流体力の計算に n_x を用いないストリップ法プログラムでは、通常 \bar{E}_1^{FK} は式(21)に基づいて計算され、その中には $A_H(\bar{x})$ 上の積分を数値的に解く方法、あるいはより簡単に入射波の波粒子速度を一点で代表して解く方法等がある^{8) 10)}。ここでは、断面を矩形で近似

した上で解析的に求める。断面形状を幅 $B'(\bar{x})$ 、深さ $d'(\bar{x})$ としたとき、 $A_H(\bar{x})$ 上の積分は次のように表される。

$$\int_{A_H(\bar{x})} e^{kz-iky \sin \beta} \frac{dydz}{LB} = \frac{1 - e^{-kd'(\bar{x})}}{kL} \frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w \bar{B}'(\bar{x})}{2} \quad (22)$$

ここに $\bar{B}'(\bar{x}) = B'(\bar{x})/B$ である。式(22)を式(21)に代入して次のように近似する。

$$\bar{E}_1^{FK} \cong i(1 - e^{-kd_e}) \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \frac{\bar{k}_l}{kL} \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \bar{B}'(\bar{x}) d\bar{x} \quad (23)$$

式(23)の近似では積分を簡単にするため

$$\sin \frac{\bar{k}_w \bar{B}'(\bar{x})}{2} \cong \bar{B}'(\bar{x}) \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \quad (24)$$

としており、さらにスミス修正係数 $e^{-kd'}$ の喫水 $d'(x)$ を等価喫水 d_e に置き換え積分の外に出している。ここで、水面下形状の y - z 平面への投影面は $B \times dC_m$ の矩形に近似し得ると考え、 $d_e = dC_m$ とする。また、 $\bar{B}'(\bar{x})$ の分布は浮心前後位置LCBを中心とした前後対称の面積 C_p の台形分布で仮定する：

$$\bar{B}'(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\bar{x}| \leq C_p - 0.5 \\ \frac{0.5 - |\bar{x}|}{1 - C_p} & \text{for } C_p - 0.5 < |\bar{x}| \leq 0.5 \end{cases} \quad (25)$$

面積を C_p としたのは無次元排水量を $C_b (= C_p C_m)$ とするためである。以上を式(23)に代入し、次の提案算式を得る。

$$\bar{E}_1^{FK} = i(1 - e^{-kdC_m}) \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \times \left(\frac{2}{kL} \sin \frac{C_p \bar{k}_l}{2} \right) \left\{ \frac{2}{(1 - C_p) \bar{k}_l} \sin \frac{(1 - C_p) \bar{k}_l}{2} \right\} \quad (26)$$

提案算式(26)を k について展開すると、その長波長域における漸近値は厳密値(11)に一致する事が確認できる。

開発した算式(26)と、2.4節で示した実船のシリーズ計算値を比較したものを図3に示す。図3より、 $\Im[\bar{E}_1^{FK}]$ はいずれの船舶、波条件においても良好な精度を有していることが分かる。 $\Re[\bar{E}_1^{FK}]$ については、

算式では前後対称船型を仮定したために奇関数の対称領域積分より0となる。これに対して、実船の値も高々 $\Re[\bar{E}_1^{FK}] = 0.02$ 程度であり、船型の前後非対称影響は無視し得ることが確認できる。

なお、一般商船の船体中央横断面積係数は殆どが $C_m > 0.96$ の範囲にあるため、算式で $C_m = 1$ としても多くの場合精度は殆ど低下しない。また、 $\bar{B}'(\bar{x})$ を式(25)にみられる台形ではなく面積 C_p の矩形分布で近似した場合、 \bar{E}_1^{FK} は式(26)右辺の中括弧を除いた式となるが、その場合短波長域における推定精度が著しく低下することが確認された。 n_x は主に船首尾付近で値を持つため、他の流体力よりも船首尾の形状近似の重要性が高く、幅の船長方向分布を実船型に近い台形(表1を参照)とすることで高精度の算式が得られた。

3.3 Heave及pitch

船体の横断面形状を幅 $B'(\bar{x})$ 、深さ $d'(\bar{x})$ の矩形とみなしたとき、 z 方向の断面Froude-Krylov力 $\bar{f}_3^{FK}(\bar{x})$ は次式となる。

$$\bar{f}_3^{FK}(\bar{x}) = \left\{ \frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w \bar{B}'(\bar{x})}{2} \right\} e^{-kd'(\bar{x}) - i\bar{k}_l \bar{x}} \quad (27)$$

式(27)を式(7)に代入し、式(24)の近似を行い、さらに等価喫水 d_e を用いてスミス修正係数を積分の外に出すことで、 $\bar{E}_3^{FK}, \bar{E}_5^{FK}$ は次のように表すことができる。

$$\bar{E}_3^{FK} \cong e^{-kd_e} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \bar{B}'(\bar{x}) d\bar{x} \quad (28)$$

$$\bar{E}_5^{FK} \cong e^{-kd_e} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} -\bar{x} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \bar{B}'(\bar{x}) d\bar{x} \quad (29)$$

ここで等価喫水 d_e は、水面下の瘦せを考慮して $d_e = dC_{vp}$ とする。また、 $\bar{E}_3^{FK}, \bar{E}_5^{FK}$ は n_z に関する積分なので、船型の z 方向投影面形状、すなわち水線面形状が支配的であると考えられる。このことから、 $\bar{B}'(\bar{x})$ は水線幅 $\bar{B}_w(\bar{x})$ に相当すると考え、LCFを中心とした面積 C_w の矩形分布であると仮定する：

$$\bar{B}'(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\bar{x} - \bar{x}_f| \leq C_w/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

以上を用いた場合、式(28)、(29)の積分は次の通りとなる。

$$\int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \bar{B}'(\bar{x}) d\bar{x} = e^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f} \left(\frac{2}{\bar{k}_l} \sin \frac{C_w \bar{k}_l}{2} \right) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} -\bar{x} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \bar{B}'(\bar{x}) d\bar{x} \\ & = i e^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f} \frac{1}{\bar{k}_l} \left\{ \left(\frac{2}{\bar{k}_l} + 2i\bar{x}_f \right) \sin \frac{C_w \bar{k}_l}{2} - C_w \cos \frac{C_w \bar{k}_l}{2} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

式(31), (32)右辺にある $e^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f}$ は, 入射波の位相が船体の重心基準となっているのに対し, Froude-Krylov力の作用中心がLCFとなっていることによる位相差である。一方で, 式(32)右辺に見られる小括弧内の \bar{x}_f は, \bar{E}_5^{FK} が重心まわりのモーメントとして定義されていることによる重心と作用中心のレバーである。

以上の式は, 結果的に船体を“LCFを中心とした $LC_w \times B \times dC_{vp}$ の箱船”とみなすことで導出された式である。水線面形状を $LC_w \times B$ の矩形かつ喫水を dC_{vp} で一樣とみなす事は, 横波の場合は入射波面が $e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} = 1$ と船長方向に均一になるため正しい近似であると言える。しかしながら, 縦波の短波長域では波面 $e^{-i\bar{k}_l \bar{x}}$ が船長方向に変化することで船型の重みが船長方向で一樣ではなくなるため, 船体形状を箱型で近似することに無理が生じる。そこで, 算式の簡潔さを損なうことなく縦波の短波長域において水線面ならびに水面下の肥瘦の影響を考慮するため, 算式の \bar{k}_l を次の \bar{k}_l' に置き換えることにする。

$$\bar{k}_l' = C_b^{-0.15} \bar{k}_l \quad (33)$$

船長方向無次元波数 \bar{k}_l に修正を施したのは, 縦波かつ短波長域における値を変化させるためであり, 修正に C_b を用いたのは, $C_b = C_w C_{vp}$ より, 水線面の肥瘦(C_w)と水面下の肥瘦(C_{vp})の両方に対して補正を施すためである。指数の -0.15 は実船型の結果を踏まえ, 一致度が高くなるように決定している。

以上の議論から, 次式をheave, pitchのFroude-Krylov力の簡易算式として提案する。

$$\bar{E}_3^{FK} = e^{-i\bar{k}_l' \bar{x}_f - kdC_{vp}} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left(\frac{2}{\bar{k}_l'} \sin \frac{C_w \bar{k}_l'}{2} \right) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_5^{FK} & = i e^{-i\bar{k}_l' \bar{x}_f - kdC_{vp}} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \\ & \times \frac{1}{\bar{k}_l'} \left\{ \left(\frac{2}{\bar{k}_l'} + 2i\bar{x}_f \right) \sin \frac{C_w \bar{k}_l'}{2} - C_w \cos \frac{C_w \bar{k}_l'}{2} \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

上式のうち, $e^{-i\bar{k}_l' \bar{x}_f}$ については \bar{k}_l' ではなく \bar{k}_l を用いているが, これは, 入射波の山/谷がLCF位置に達した瞬間に \bar{E}_3^{FK} が最大/最小となるべきとの考えに基づいている。

開発した算式(34), (35)とシリーズ計算値を比較したものをそれぞれ図4, 図5に示す。いずれの船舶, 波条件においても良好な実用的な精度を有する算式であることが確認できる。船体形状の前後非対称性に起因する $\Im[\bar{E}_3^{FK}]$, $\Re[\bar{E}_5^{FK}]$ についても良い相関が見られ, このことは, z方向力の作用中心がLCFにあるとみなすことが妥当であることを意味する。

式(34), (35)の振幅は, 図2より \bar{x}_f の値は ± 0.05 程度と小さいので \bar{x}_f の二乗の項を無視し, 次式のように表せる。

$$|\bar{E}_3^{FK}| = e^{-kdC_{vp}} \left| \frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right| \left| \frac{2}{\bar{k}_l'} \sin \frac{C_w \bar{k}_l'}{2} \right| \quad (36)$$

$$\begin{aligned} |\bar{E}_5^{FK}| & = e^{-kdC_{vp}} \left| \frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right| \\ & \times \left| \frac{1}{\bar{k}_l'} \left(\frac{2}{\bar{k}_l'} \sin \frac{C_w \bar{k}_l'}{2} - C_w \cos \frac{C_w \bar{k}_l'}{2} \right) \right| \end{aligned} \quad (37)$$

すなわち, \bar{x}_f は主に位相の計算に対して用いられるもので, 振幅への影響は無視し得る。以上の算式において, $\bar{k}_w = 0, C_w = C_b = 1$ とするとJensenによる算式³⁾と一致することが確認できる。提案算式は, 数式の煩雑さはJensenの算式とさほど変わらず, 船体形状パラメータ C_b, C_w の影響を適切に考慮し, さらに位相の情報も \bar{x}_f によって明確に得られるという点で高度化された算式となっている。

Heaveの提案算式(34)の長波長域の漸近値は, 厳密式(12)に一致することが確認できる。一方でpitchの算式(35)は, 長波長域で次の値に漸近する。

$$\bar{E}_5^{FK} \sim i \bar{k}_l' \frac{C_w^3}{12} - \bar{x}_f C_w \quad \text{as } k \rightarrow 0 \quad (38)$$

右辺を厳密式(13)と照らし合わせると, pitchの無次元復原力係数 $dC_b/L^2 \times GM_L$ に相当する量が次のように対応していることが分かる。

$$\frac{dC_b}{L^2} GM_L \leftrightarrow C_b^{-0.15} \frac{C_w^3}{12} \quad (39)$$

式(39)右辺は $\bar{B}_w(\bar{x})$ を矩形分布(式(30)右辺)で近似した時のpitchの無次元復原力係数 $C_w^3/12$ に補正 $C_b^{-0.15}$ が掛けられた式で, 式(39)左辺とは一致しな

いものの悪く無い近似となっており、長波長において実用上問題ない精度を有していることは図5から確認できる。なお、 $\bar{B}'(\bar{x})$ を式(30)のような矩形ではなく台形分布で近似した場合についても検討を行ったが、算式が煩雑になる割には大きな精度の向上はみられなかった。結果的に、矩形分布近似に式(33)の修正を施した式(34)、(35)が簡潔さと精度を兼ね揃えており、本研究ではこれらを提案算式とした。

3.4 Sway及びyaw

船体の横断面形状を幅 $B'(\bar{x})$ 、深さ $d'(\bar{x})$ の矩形とみなしたとき、 y 方向の断面Froude-Krylov力 $\bar{f}_2^{FK}(\bar{x})$ は次式のようになる。

$$\bar{f}_2^{FK}(\bar{x}) = i\{1 - e^{-kd'(\bar{x})}\} \left\{ \frac{2}{KB} \sin \frac{\bar{k}_w \bar{B}'(\bar{x})}{2} \right\} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \quad (40)$$

式(40)を式(7)に代入し、式(24)の近似を行い、等価喫水 d_e を用いてスミス修正係数を積分の外に出すことで、 $\bar{E}_2^{FK}, \bar{E}_6^{FK}$ を次のように表す。

$$\bar{E}_2^{FK} \cong i(1 - e^{-kd_e}) \left(\frac{2}{KB} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \bar{B}'(\bar{x}) d\bar{x} \quad (41)$$

$$\bar{E}_6^{FK} \cong i(1 - e^{-kd_e}) \left(\frac{2}{KB} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} \bar{x} e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \bar{B}'(\bar{x}) d\bar{x} \quad (42)$$

ところで、 $\bar{f}_2^{FK}(\bar{x})$ の定義式(6)は表面積分による定義であるが、これにガウスの勾配定理を適用することで、 φ_0 の横断面上の面積分に置き換えることもできる。この事実から、等価喫水は喫水線下の痩せの影響を考慮して $d_e = dC_{vp}$ と近似する。ただし、 \bar{E}_6^{FK} については本節末にて後述の長波長域における漸近値を考慮して $d_e = dC_{vp}^2$ と与える。また、幅 $\bar{B}'(\bar{x})$ の分布はLCBを中心とした面積 C_w の矩形分布と仮定する：

$$\bar{B}'(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\bar{x}| \leq C_w/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (43)$$

式(43)を式(41)、(42)に代入することで、結局次の簡易算式を得る。

$$\bar{E}_2^{FK} = i(1 - e^{-kdC_{vp}}) \left(\frac{2}{kB} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left(\frac{2}{\bar{k}_l} \sin \frac{C_w \bar{k}_l}{2} \right) \quad (44)$$

$$\bar{E}_6^{FK} = (1 - e^{-kdC_{vp}^2}) \left(\frac{2}{kB} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \times \frac{1}{\bar{k}_l} \left(\frac{2}{\bar{k}_l} \sin \frac{C_w \bar{k}_l}{2} - C_w \cos \frac{C_w \bar{k}_l}{2} \right) \quad (45)$$

開発した算式(44)、(45)とシリーズ計算値を比較したものをそれぞれ図6、図7に示す。いずれの船舶、波条件においても良好な精度を有していることが分かる。 $\Re[\bar{E}_2^{FK}]$ と $\Im[\bar{E}_6^{FK}]$ については算式では0で、計算値でも高々 $\Re[\bar{E}_2^{FK}] = 0.01$ 、 $\Im[\bar{E}_6^{FK}] = 0.002$ 程度であり、殆ど0とみなしてよい。この事実は、 y 方向力の作用中心がLCBにあるとみなすことが妥当であることを意味している。提案算式は、 $\bar{E}_3^{FK}, \bar{E}_5^{FK}$ と同じく、船体を $LC_w \times B \times dC_{vp}$ の箱型とみなした式となっている。3.3節では、船体を箱型とみなした場合、 z 方向Froude-Krylov力は縦波の短波長域で精度が低下すると説明したが、縦波における y 方向力はそもそも0であるために、 $\bar{E}_2^{FK}, \bar{E}_6^{FK}$ については式(33)のような補正を施さなくとも十分実用的な精度を有している。

Swayの簡易算式(44)を k で展開すると、その長波長域における漸近値は厳密値(14)に一致することが確かめられる。一方でyawの簡易算式(45)は、 k の二次のオーダーまで展開すると次のように表される。

$$\bar{E}_6^{FK} \sim \bar{k}_w \bar{k}_l \frac{d C_w C_b^2}{B} \frac{1}{12} \quad \text{as } k \rightarrow 0 \quad (46)$$

式(46)と厳密式(15)の右辺同士を照合すると、次のように対応することが確かめられる。

$$\frac{1}{L^3 B d} \int_{V_H} (x^2 - y^2) dV \leftrightarrow \frac{C_w C_b^2}{12} \quad (47)$$

\bar{E}_6^{FK} において $d_e = dC_{vp}^2$ とした理由は、式(47)の対応を考慮した結果である。すなわち、 $d_e = dC_{vp}^2$ とすることで導かれた式(47)の右辺は、左辺の積分のよい近似となっている。等価喫水を \bar{E}_2^{FK} と同じ $d_e = dC_{vp}$ とした場合、式(47)の右辺は $C_w^2 C_b / 12$ となり、その近似精度は落ちる。事実、等価喫水を dC_{vp} とするよりも dC_{vp}^2 とした方が、全体的に \bar{E}_6^{FK} の推定精度が高いことが確認された。

3.5 Roll

まず、 x 軸（喫水線高さ）まわりの断面Froude-Krylovモーメントを $\bar{f}_{40}^{FK}(\bar{x})$ 、Froude-Krylovモーメ

ントを \bar{E}_{40}^{FK} と書くと、重心まわりの値 $\bar{f}_4^{FK}(\bar{x})$, \bar{E}_4^{FK} との関係は、 n_4 の定義式(5)より次式の通りとなる。

$$\begin{aligned} \bar{f}_4^{FK}(\bar{x}) &= \bar{f}_{40}^{FK}(\bar{x}) + \bar{z}_G \bar{f}_2^{FK}(\bar{x}) \\ \bar{E}_4^{FK} &= \bar{E}_{40}^{FK} + \bar{z}_G \bar{E}_2^{FK} \end{aligned} \quad (48)$$

以降は、 x 軸まわりのモーメント $\bar{f}_{40}^{FK}(\bar{x})$, \bar{E}_{40}^{FK} について考える。

断面形状を幅 $B'(\bar{x})$ 、深さ $d'(\bar{x})$ の矩形とみなしたとき、断面Froude-Krylovモーメント $\bar{f}_{40}^{FK}(\bar{x})$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{f}_{40}^{FK}(\bar{x}) &= ie^{-i\bar{k}_l \bar{x}} \left\{ \frac{2}{KB} \sin \frac{\bar{k}_w \bar{B}'(\bar{x})}{2} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1 - \{1 + kd'(\bar{x})\} e^{-kd'(\bar{x})}}{KB} \right] \\ &\quad \left. - ie^{-i\bar{k}_l \bar{x} - kd'(\bar{x})} \frac{1}{\bar{k}_w} \left\{ \frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w \bar{B}'(\bar{x})}{2} - \bar{B}'(\bar{x}) \cos \frac{\bar{k}_w \bar{B}'(\bar{x})}{2} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

右辺第1項は左右の側壁からの寄与、第2項は底面からの寄与である。式(49)は、梅田らによる有効波傾斜係数の簡易推定式¹¹⁾と同様のものである。ただし、梅田らによる E_4^{FK} の推定法は、横断面毎に $d'(x)$, $B'(x)$ の情報を与え、 $f_4^{FK}(x)$ を数値積分することを要求しており、推定精度は高いがその分必要とされるパラメータの数は多い。

さて、式(49)を式(7)に代入し、式(49)の右辺第1項には式(24)の近似を適用し、第2項には次の近似を適用する。

$$\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w \bar{B}'}{2} - \bar{B}' \cos \frac{\bar{k}_w \bar{B}'}{2} \cong \bar{B}'^3 \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} - \cos \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \quad (50)$$

式(50)の近似は、左辺を \bar{k}_w で展開したときのleading termが \bar{B}'^3 に比例することを根拠にしている。さらに、式(49)の右辺第1項、第2項はそれぞれ n_y , n_z に関する積分項なので、両者で異なる形状近似を行うべく、それぞれ異なる等価喫水 d_{e1} , d_{e2} ならびに幅 $\bar{B}'_1(\bar{x})$, $\bar{B}'_2(\bar{x})$ を用いて区別することにする。以上によって、 \bar{E}_{40}^{FK} を次のように表す。

$$\begin{aligned} \bar{E}_{40}^{FK} &\cong i \left\{ \frac{1 - (1 + kd_{e1}) e^{-kd_{e1}}}{kB} \right\} \left(\frac{2}{\bar{k}_B} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \\ &\quad \times \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} \bar{B}'_1(\bar{x}) e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} d\bar{x} - ie^{-kd_{e2}} \frac{1}{\bar{k}_w} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} - \cos \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \\ &\quad \times \int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} \{\bar{B}'_2(\bar{x})\}^3 e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} d\bar{x} \end{aligned} \quad (51)$$

続いて式(51)右辺の積分の近似値を考える。式(51)の右辺第1項、すなわち側壁に起因する項については、喫水がモーメントのレバーとして強く影響するため $d_{e1} = d$ とする。また、 $\bar{B}'_1(\bar{x})$ をLCBを中心とした面積 C_b の矩形と仮定する：

$$\bar{B}'_1(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\bar{x}| \leq C_b/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (52)$$

LCBを中心としたのは、本項は n_y に関する積分であるから \bar{E}_2^{FK} , \bar{E}_6^{FK} と同様と考えたためであり、面積を C_b としたのは、 $d_{e1} B'_1(x)$ の積分値を排水容積 $LBdC_b$ に一致させるためである。以上により式(51)の右辺第1項は次のように表される。

$$(\text{第1項}) = i \left\{ \frac{1 - (1 + kd) e^{-kd}}{kB} \right\} \left(\frac{2}{\bar{k}_B} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left(\frac{2}{\bar{k}_l} \sin \frac{C_b \bar{k}_l}{2} \right) \quad (53)$$

次に、式(51)の右辺第2項、すなわち底面に起因する項は n_z に関する積分であるため、heave, pitchのFroude-Krylov力と同様に $d_{e2} = dC_{vp}$ 、かつ $\bar{B}'_2(\bar{x})$ は水線幅 $\bar{B}_w(\bar{x})$ に相当すると考え、LCFを中心とした面積 C_w の台形分布とみなす：

$$\bar{B}'_2(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\bar{x} - \bar{x}_f| \leq C_w - 0.5 \\ \frac{0.5 - |\bar{x}|}{1 - C_w} & \text{for } C_w - 0.5 < |\bar{x} - \bar{x}_f| \leq 0.5 \end{cases} \quad (54)$$

ところが式(54)の形状を採用した場合、 $\{\bar{B}'_2(\bar{x})\}^3 e^{-i\bar{k}_l \bar{x}}$ の積分値の表示が煩雑になる。そこで、入射波面の船長方向分布 $e^{-i\bar{k}_l \bar{x}}$ が横波で $e^{-i\bar{k}_l \bar{x}} = 1$ となることを利用し、横波における推定精度を低下させずに式の簡略化を行うことにする。すなわち、台形分布の式(54)を用いた $\{\bar{B}'_2(\bar{x})\}^3 e^{-i\bar{k}_l \bar{x}}$ の積分値は横波において

$$\int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} \{\bar{B}'_2(\bar{x})\}^3 d\bar{x} = \frac{3C_w - 1}{2} \quad (55)$$

$$\text{(第3項)} \sim -i\bar{k}_w \frac{dC_b}{B^2} \{-z_G\} \quad \text{as } k \rightarrow 0 \quad (61)$$

と簡潔に表されることを踏まえ、 $\bar{B}'_2(\bar{x})$ の分布を“LCFを中心とした面積 $(3C_w - 1)/2$ の矩形分布”とみなせば、横波における精度を保ったまま積分の複雑化を避けることができる。この場合、式(51)の右辺第2項の積分は次のように表される。

$$\int_{\bar{x}_A}^{\bar{x}_F} \{\bar{B}'_2(\bar{x})\}^3 e^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f} d\bar{x} = e^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f} \frac{2}{\bar{k}_l} \sin \frac{(3C_w - 1)\bar{k}_l}{4} \quad (56)$$

結果、式(51)の右辺第2項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{(第2項)} &= -ie^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f - kdC_{vp}} \frac{1}{\bar{k}_w} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} - \cos \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{2}{\bar{k}_l} \sin \frac{(3C_w - 1)\bar{k}_l}{4} \right\} \end{aligned} \quad (57)$$

最終的に、重心まわりのrollのFroude-Krylovモーメントとして次の簡易算式を得た。

$$\begin{aligned} \bar{E}_4^{FK} &= i \left\{ \frac{1 - (1 + kd)e^{-kd}}{kB} \right\} \left(\frac{2}{\bar{k}_B} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left(\frac{2}{\bar{k}_l} \sin \frac{C_b \bar{k}_l}{2} \right) \\ &\quad - ie^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f - kdC_{vp}} \frac{1}{\bar{k}_w} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} - \cos \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{2}{\bar{k}_l} \sin \frac{(3C_w - 1)\bar{k}_l}{4} \right\} + \bar{z}_G \bar{E}_2^{FK} \end{aligned} \quad (58)$$

開発した簡易算式(58)について、シリーズ計算値と比較したものを図8に示す。短波長域で若干の精度低下がみられるが、簡易算式としては十分実用的な精度を有していることが分かる。

提案算式(58)右辺の各項は、 k について展開することで、長波長域でそれぞれ次の値に漸近することが確かめられる。

$$\text{(第1項)} \sim -i\bar{k}_w \frac{dC_b}{B^2} \left\{ -\frac{d}{2} \right\} \quad \text{as } k \rightarrow 0 \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \text{(第2項)} &\sim -i\bar{k}_w \frac{dC_b}{B^2} \left\{ \frac{B^2 (3C_w - 1)}{dC_b 24} \right\} \\ &\quad \text{as } k \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (60)$$

厳密値(16)と比較すると、式(59)~(61)の中括弧で括った中身の和はGMに一致し、上から順に式(20)右辺の z_B , BM , $-z_G$ にあたることわかる。第1項の式(59)では側壁の形状を箱型で近似したために $z_B = -d/2$ となり、第2項の式(60)では式(20), (55)より水線幅 $\bar{B}_w(\bar{x})$ を台形分布で近似したときの BM となっている。第2項の算式化において、 $\bar{B}'_2(\bar{x})$ の分布を単なる面積 C_w の矩形で近似した場合、実際の BM の値と乖離し、長波長域の精度が低下し、それに伴い短波長における精度も低下することが確認された。横波における精度を保つために $\bar{B}'_2(\bar{x})$ の分布の面積に式(55)右辺を用いたことが、全波条件における推定精度の向上につながっている。

3.6 縦/横メタセンタ高さをを用いたpitch/rollモーメントの算式

前3.3節で示したpitchモーメント \bar{E}_5^{FK} の式(35)および3.5節で示したrollモーメント \bar{E}_4^{FK} の式(58)は、長波長域において厳密な漸近値である復原力係数を近似した値に漸近することを説明した。これに対し、算式に船舶の復原力係数すなわち縦/横メタセンタ高さを認めた場合には、これらを用いて厳密な漸近値をとる \bar{E}_5^{FK} , \bar{E}_4^{FK} の算式を示すことができる。本節では、縦/横メタセンタ高さをを用いた \bar{E}_5^{FK} , \bar{E}_4^{FK} の表現を示し、すでに開発した算式(35), (58)と比較する。

まず \bar{E}_5^{FK} の算式について考える。 \bar{E}_5^{FK} の算式(35)のうち $C_w \bar{k}'_l$ 依存の関数を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{k}'_l} \left\{ \frac{2}{\bar{k}'_l} \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} - C_w \cos \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right\} &= \bar{k}_l \frac{C_w^3 C_b^{-0.15}}{12} \\ &\quad \times 3 \left(\frac{2}{C_w \bar{k}'_l} \right)^2 \left(\frac{2}{\bar{k}'_l C_w} \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} - \cos \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

右辺の下線部は式(39)よりpitchの無次元復原力係数 $dC_b/L^2 \times GM_L$ に対応する量であるから、これを $dC_b/L^2 \times GM_L$ に置き換えることで \bar{E}_5^{FK} の次の表示が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{E}_5^{FK} &= e^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f - kdC_{vp}} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \\ &\quad \times \left\{ i\bar{k}_l \frac{dC_b}{L^2} GM_L f(C_w \bar{k}'_l) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\bar{x}_f}{\bar{k}'_l} \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right\} \end{aligned} \quad (63)$$

ここに $f(x)$ は $x \rightarrow 0$ で1に漸近する次の関数である。

$$f(x) = \frac{12}{x^2} \left(\frac{2}{x} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 1 + O(x^2) \quad (64)$$

式(62)において下線部を $dC_b/L^2 \times GM_L$ に置き換えたことで、 GM_L の正しい値を用いれば、式(63)は長波長域で厳密値(13)に漸近する。また式(63)は、 \bar{x}_f を無視すれば、smith修正係数と、長波長で1に漸近する波長依存の関数 $f(C_w \bar{k}_l)$ 、正しい漸近値 $\bar{k}_l dC_b/L^2 \times GM_L$ の積で表された物理的意味の理解しやすい構成をしている。式(63)は、長波長域は勿論、短波長域においても式(35)より若干精度が向上することが確認された。したがって縦メタセンタ高さ GM_L が既知の場合は(63)を用いるとよいと考えられる。

続いて \bar{E}_4^{FK} の算式について考える。 \bar{E}_4^{FK} の算式(58)において $\beta = \pi/2$ すなわち横波を前提とした簡略化をし、さらに k についてマクローリン展開して2次の項までとると次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{E}_4^{FK} &= -\frac{ikdC_b}{B} \left\{ -\frac{d}{2} \left(1 - \frac{2}{3}kd \right) - z_G (1 - kdC_{vp}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^2}{dC_b} \frac{3C_w - 1}{24} (1 - kdC_{vp}) \right\} + O(k^3) \\ &\cong -ikBe^{-kdC_{vp}} \frac{dC_b}{B^2} GM \end{aligned} \quad (65)$$

式(65)最右辺の近似は、3.5節で説明したように式(65)の下線部の和がGMに対応することと、 $e^{-kdC_{vp}} \sim 1 - kdC_{vp}$ を考慮した結果である。上式は横波に限定して簡易化したものであるが、斜め波にも対応させるため、式(16)との対応から式(65)の kB を \bar{k}_w に置き換え、さらに縦方向無次元波数による補正係数 $(2/C_w \bar{k}_l) \sin(C_w \bar{k}_l/2)$ (水線面を $C_w L \times B$ の矩形と近似したときの値) を乗じて次式を得た。

$$\bar{E}_4^{FK} = -i\bar{k}_w e^{-kdC_{vp}} \left(\frac{2}{C_w \bar{k}_l} \sin \frac{C_w \bar{k}_l}{2} \right) \frac{dC_b}{B^2} GM \quad (66)$$

本算式はGMを用いない式(58)比べると非常に簡潔であり、さらに復原力係数 $dC_b/B^2 \times GM$ と入射波の副波面(sub-surface)の傾斜角 $\bar{k}_w e^{-kdC_{vp}}$ の積といった物理的に極めて明確な式になっている。GMを既知とした場合の式(66)の精度は、図9に示す通り、 λ/L が0.7より短波長において式(58)の精度(図8)より若干低下するものの、おおむね良好であることがわかる。また、式(66)の実部は0なので、式(58)

とは違って位相の情報は得られない。ただし、式(66)は式(58)に比べて長波長域の漸近値が厳密で、簡単かつ分かりやすい物理量で構成されている点で優れている。横メタセンタ高さGMもごく基本的な量で既知であることが多いため、簡易推定としては十分に実用的と考えられる。

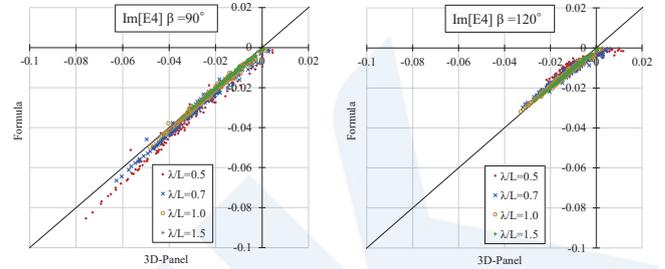


図9 Comparison of \bar{E}_4^{FK} between proposed Formula (66) and numerical calculation.

3.7 計算上の留意事項

以上によって6自由度の簡易算式が提示された。ただし、簡易算式を計算する上で、分母が0となる条件の処理に注意を払う必要がある。解析的には有限の極限值を取るため問題ないが、数値計算では \bar{k}_w が0となる縦波、 \bar{k}_l が0となる横波において、数値エラー、あるいは丸め誤差が過大に表れ不合理な値となる。このような場合、極限値の式を条件分岐によって与える方法で回避するか、あるいはより簡単に、波向きを 0° や 90° からわずかに(0.1° 程度)ずらすことでも正常な値を得ることができる。

また、開発した算式は複素振幅で表されているが、振幅を得る場合は、3.3節で述べたように、 $\bar{x}_f = 0$ として絶対値をとるだけでよい。一方で位相については、式(1)にあるように複素振幅の偏角 $\arg(E_i^{FK})$ を計算すればよいが、複素数を扱えないソルバーを用いる場合は、実部と虚部に分けて扱う必要がある。その場合、

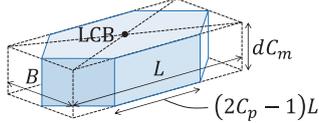
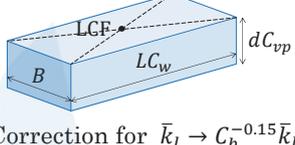
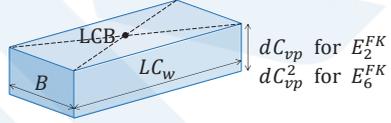
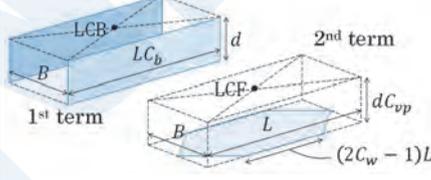
$$e^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f} \cong 1 - i\bar{k}_l \bar{x}_f \quad (67)$$

と近似して \bar{x}_f の二次以上の項を無視することで式の複雑化を避けられる。図3～図8に示した算式の値も、そのように計算している。

加えて、提案算式は、波の山が船体の重心位置に達する瞬間を時刻の基準としていることに注意が必要である。時刻の基準を波の山が $x = x_1$ 位置に達する瞬間としたい場合は、提案算式 E_i^{FK} に対して次のように位相を乗じればよい。

$$E_i^{FK} \rightarrow e^{i\bar{k}_l x_1} E_i^{FK} \quad (68)$$

表1 Summary of proposed formulae and hull-form approximations.

Mode	Proposed Formula	Hull-form approximation
Surge	$\bar{E}_1^{FK} = i(1 - e^{-kdC_m}) \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left(\frac{2}{kL} \sin \frac{C_p \bar{k}_l}{2} \right) \left\{ \frac{2}{(1 - C_p) \bar{k}_l} \sin \frac{(1 - C_p) \bar{k}_l}{2} \right\}$	
Heave	$\bar{E}_3^{FK} = e^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f - kdC_{vp}} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left(\frac{2}{\bar{k}'_l} \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right)$	 + Correction for $\bar{k}_l \rightarrow C_b^{-0.15} \bar{k}_l$
Pitch around COG	$\bar{E}_5^{FK} = ie^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f - kdC_{vp}} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \frac{1}{\bar{k}'_l} \left\{ \left(\frac{2}{\bar{k}'_l} + 2i\bar{x}_f \right) \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} - C_w \cos \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right\}$ $\bar{E}_5^{FK} = ie^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f - kdC_{vp}} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left\{ \bar{k}_l \frac{dC_b}{L^2} \text{GM}_L f(C_w \bar{k}'_l) + \frac{2i\bar{x}_f}{\bar{k}'_l} \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right\}$ where, $f(x) = \frac{12}{x^2} \left(\frac{2}{x} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)$	
Sway	$\bar{E}_2^{FK} = i(1 - e^{-kdC_{vp}}) \left(\frac{2}{kB} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left(\frac{2}{\bar{k}'_l} \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right)$	
Yaw around COG	$\bar{E}_6^{FK} = (1 - e^{-kdC_{vp}^2}) \left(\frac{2}{kB} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \frac{1}{\bar{k}'_l} \left(\frac{2}{\bar{k}'_l} \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} - C_w \cos \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right)$	
Roll around COG	$\bar{E}_4^{FK} = i \left\{ \frac{1 - (1 + kd)e^{-kd}}{kB} \right\} \left(\frac{2}{kB} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left(\frac{2}{\bar{k}'_l} \sin \frac{C_b \bar{k}'_l}{2} \right)$ $- ie^{-i\bar{k}_l \bar{x}_f - kdC_{vp}} \frac{1}{\bar{k}_w} \left(\frac{2}{\bar{k}_w} \sin \frac{\bar{k}_w}{2} - \cos \frac{\bar{k}_w}{2} \right) \left\{ \frac{2}{\bar{k}'_l} \sin \frac{(3C_w - 1) \bar{k}'_l}{4} \right\}$ $+ \bar{z}_G \bar{E}_2^{FK}$ $\bar{E}_4^{FK} = -i\bar{k}_w e^{-kdC_{vp}} \left(\frac{2}{C_w \bar{k}'_l} \sin \frac{C_w \bar{k}'_l}{2} \right) \frac{dC_b}{B^2} \text{GM}$	
Where:	$C_p = \frac{C_b}{C_m}, \quad C_{vp} = \frac{C_b}{C_w}, \quad \bar{k}_l = kL \cos \beta, \quad \bar{k}_w = kB \sin \beta, \quad \bar{k}'_l = C_b^{-0.15} \bar{k}_l, \quad \bar{x}_f = \frac{\text{LCF} - \text{LCG}}{L}, \quad \bar{z}_G = \frac{KG - d}{B}$	

4. まとめ

本論文では、船種やサイズに依らず適用可能な、波浪中船体運動の簡易推定のための6自由度のFroude-Krylov力の簡易算式を開発した。本研究のように、主要な船型パラメータのみによってFroude-Krylov力を推定できるような実用的算式を物理的考察に立脚して開発することはこれまでにない新たな試みであり、実用に足る汎用的かつ高精度の算式の開発に成功したと著者らは考える。開発した算式と形状近似をまとめたものを表1に示す。

簡易算式の開発における要点は次の通りである。

- 船種を限定せずに適用可能な算式とするため、船体形状を船舶の8つの船型パラメータ ($L, B, d, C_b, C_w, C_m, x_f$ (LCG基準のLCF), KG) によって一意に定まる関数で近似することで、Froude-Krylov力を船型パラメータと波条件を変数に持つ初等関数で示すというアプローチをとった。また、pitchおよびrollモーメントについてはそれぞれ縦メタセンタ高さ GM_L および横メタセンタ高さ GM が既知である場合を想定した

算式についても示した。

- 船体形状の近似は、幾何学的考察に基づき、かつ長波長域の漸近値が正しい値をとるように、6自由度モード毎に船体を適切な形状で近似した。Froude-Krylov力の長波長域の漸近値は復原力係数に対応するが、提案算式の漸近値はsurge, sway, heave力については厳密値に、roll, pitch, yawモーメントについては復原力係数等を船型パラメータで近似した値に近づく。縦/横メタセンタ高さを用いたpitch, rollモーメントの式については、厳密値に漸近する。
- 仮定する船型の中心位置を、 n_x, n_y に関する項についてはLCB, n_z に関する項についてはLCFとすることで、入射波に対する位相差の情報を適切に考慮した。
最後に、開発した簡易算式の特長と価値、それらがもたらす効果について列挙し、本論文の結びとする。
- 提案算式は、船種やサイズを限定しない77隻×2 (満載・バラスト) 積付条件の実船型に対し、あらゆる波向き、波長において良好な推定精度

を有する。特に長波長域ほどその精度は高い。一様流れ近似に基づく場合Froude-Krylov力は船速に依存しないため、本算式は線形理論の範囲であれば実質全ての波浪条件に対して適用することができる。

- ii) 計算に必要なのは船舶の主要な船型パラメータ8つ（縦/横メタセンタを用いる場合は9つ）のみであるため、船体の詳細な情報がなくともFroude-Krylov力を合理的に推定することができる。このことは設計の初期段階における運動性能の検討に役立つ。船型パラメータのうち x_f は一般的な主要目ではないため他と比べて得にくい、これは主に位相に対して影響するパラメータで、振幅を調べたい場合は x_f の情報は不要である。
- iii) 本研究のように、船型パラメータのみによって表されるFroude-Krylov力の推定算式を理論的アプローチによって得た例は、著者らの知る限り過去に存在しない。目的を同じくするJensenの研究³⁾では、箱船に対するFroude-Krylov力の算式を示し、それにファインネス係数による補正を与えている。それに対し提案算式は、数式の煩雑さはJensenのそれとさほど変わらず、船体形状パラメータの影響を幾何学的考察から適切に考慮し、さらに位相の情報も明確に得られるという点で高度化された算式となっている。また、rollのFroude-Krylovモーメントについては復原性基準において用いられる簡易推定算式が存在する¹⁴⁾が、船体の横断面毎の形状情報を要するものであり、これに対し提案算式は主要目のみによって合理的な推定ができるものとなっている。
- iv) Froude-Krylov力の簡易算式は、緒言にて述べたように特にrollやsurgeの簡易推定においてとりわけ高い価値を持つ。その他の運動モードについても流体力のうちの主要な成分であることに違いはなく、本研究で開発した簡易算式は波浪中船体運動の簡易推定に有効に活用されるものと考えられる。例えば、本提案算式から現状のCSRにおける運動・加速度の規定に存在しないような支配的パラメータが見出されたため、それらを用いることで算式の精度と汎用性の向上につなげることができる。と考える。

謝辞

本研究の遂行及び論文執筆にあたり、適切なアドバイスを戴いた海上技術安全研究所の深沢塔一博士、

黒田貴子博士、また、本研究のデータ分析等にご協力いただいた、日本海事協会の河邊寛博士、福元佑輔氏、日本郵船の赤松達哉氏、商船三井の大宮知起氏、脇田薫平氏、葛谷知史氏、今治造船の松脇淳也氏に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) IACS: Common Structural Rules for Bulk Carriers and Oil Tankers, 2019.
- 2) IMO: Adoption of the International Code on Intact Stability, 2008 (2008 IS Code), Resolution MSC.267/85, MSC 85/26/Add.1 Annex 2, 2008.
- 3) Jorgen, J. J., Alaa E. M., and Anders S. O.: Estimation of Ship Motions Using Closed-Form Expressions, Ocean Engineering Vol. 31, pp. 61-85, 2004.
- 4) Kashiwagi, M.: Asymptotic Values of Heave and Pitch Motions in a Very Long Wave, Journal of the Kansai Society of Naval Architects, Japan, No. 242, pp. 45-51, 2004 (in Japanese).
- 5) Peters, A. S., and J.J. Stoker: The motion of a ship as a floating rigid body in a seaway, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 10, pp. 399-490, 1957.
- 6) Tasai, F.: Study on Equation of Ship Roll Motion, Reports of Research Institute for Applied Mechanics Kyushu University, Vol. 25, 1965 (in Japanese).
田才福造：船の横揺れの運動方程式について、九州大学応用力学研究所所報、第25号、1965.
- 7) Kashiwagi, M., and Iwashita, H.: Series of Naval Architecture and Ocean Engineering, Vol. 4, Seakeeping Performance, Chapter 7, Seizando-Shoten Publishing Co., Ltd., 2012 (in Japanese).
柏木正、岩下英嗣：船舶海洋工学シリーズ④船体運動 耐航性能編、第7章、成山堂書店、2012.
- 8) Takaishi, T., and Kuroi, M.: Practical Calculation Method of Ship Motion in Waves, 2nd Symposium of Seakeeping Performance, pp.109-133, 1977(in Japanese).
高石敬史、黒井正明：波浪中船体運動の実用的計算法、第2回 耐航性に関するシンポジウム、pp. 109-133, 1977.

- 9) Oka, M., Ando, T., Ma, C., et al, H.:
Numerical Calculation Procedure of Global
Ship Motion of LNG Carrier Considering
LNG Liquid Dynamic Effect in Wave
Condition, Journal of the Japan Society of
Naval Architects and Ocean Engineers, Vol.
26, pp. 103-118, 2017 (in Japanese).
- 10) Motora, S.: On Measuring of Ship's
Resistance in Waves by Gravity
Dynamometer Method, and Surging of Ship
in Waves, Journal of Zosen Kiokai, Vol. 94,
pp. 43-52, 1953 (in Japanese).
- 11) Umeda, N., and Tsukamoto, I.: Simplified
Prediction method for Effective Wave Slope
Coefficient and its Effects on Capsizing
Probability Calculation, Conference
Proceedings of the Japan Society of Naval
Architects and Ocean Engineers, Vol. 5E, pp.
23-26, 2008 (in Japanese).

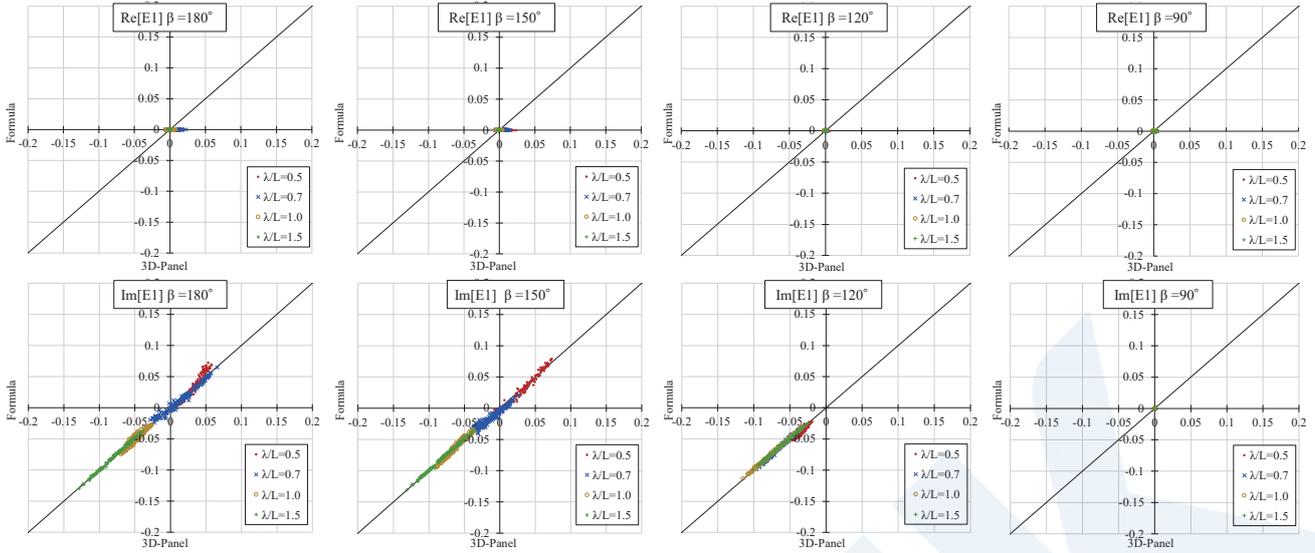


図3 Comparison of \bar{E}_1^{FK} between proposed formula and numerical calculation for target ships.

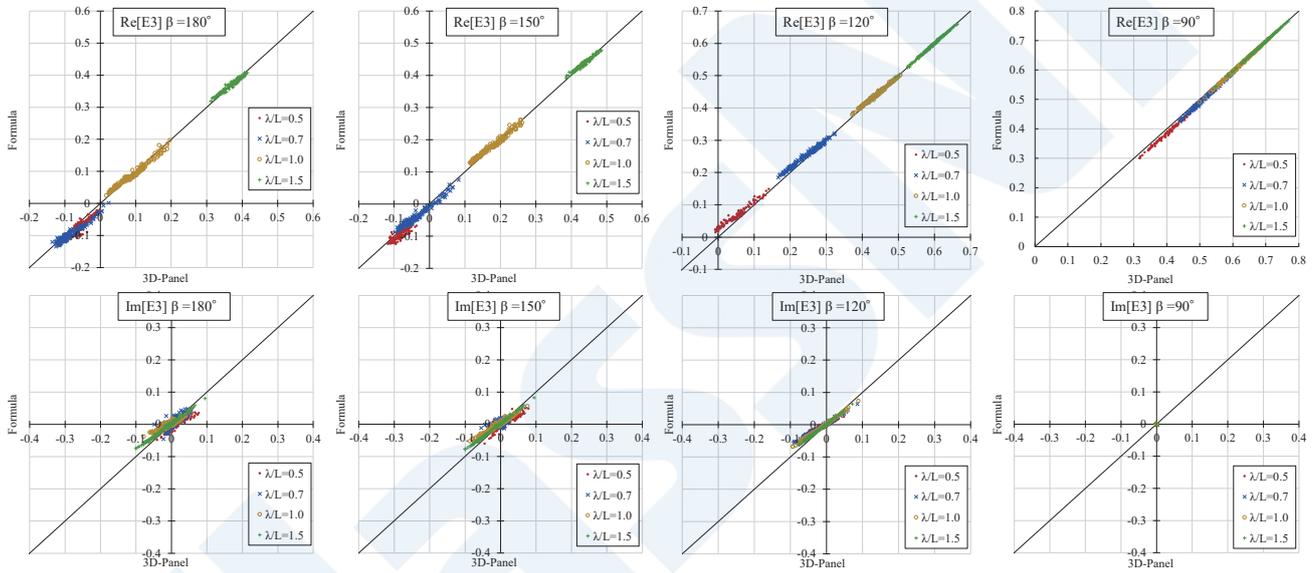


図4 Comparison of \bar{E}_3^{FK} between proposed formula and numerical calculation for target ships.

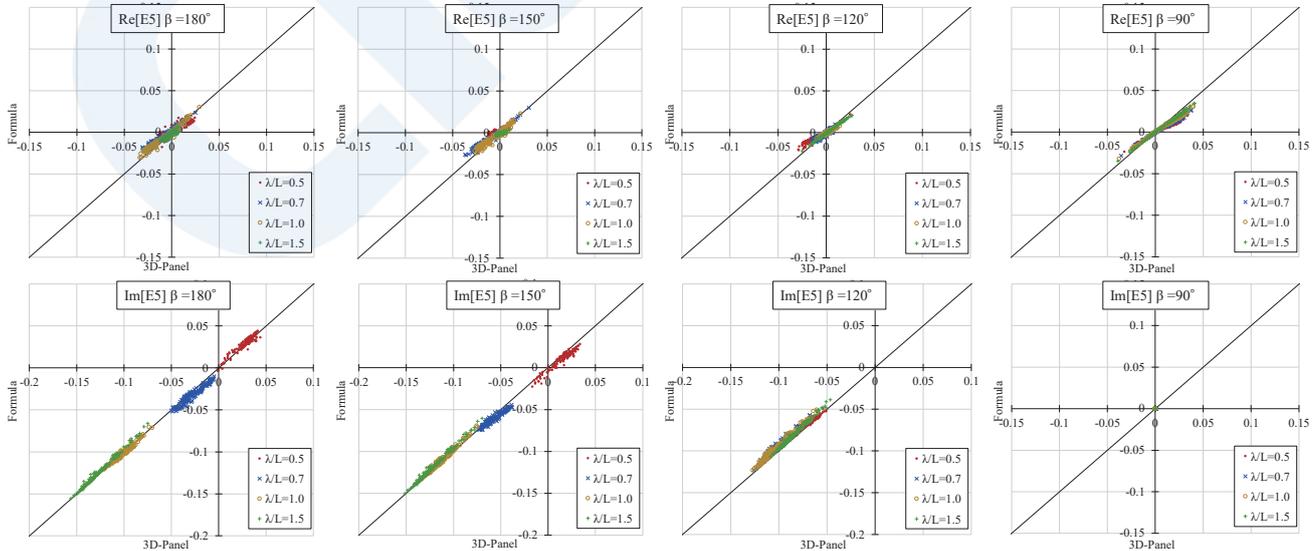


図5 Comparison of \bar{E}_5^{FK} between proposed formula and numerical calculation for target ships.

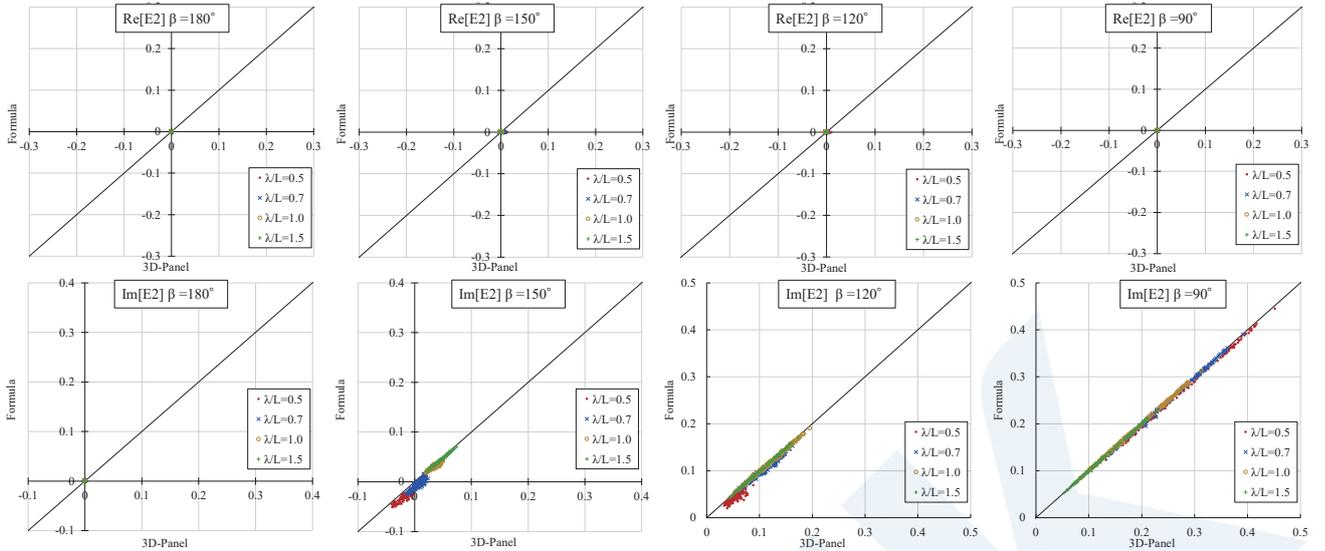


図6 Comparison of \bar{E}_2^{FK} between proposed formula and numerical calculation for target ships.

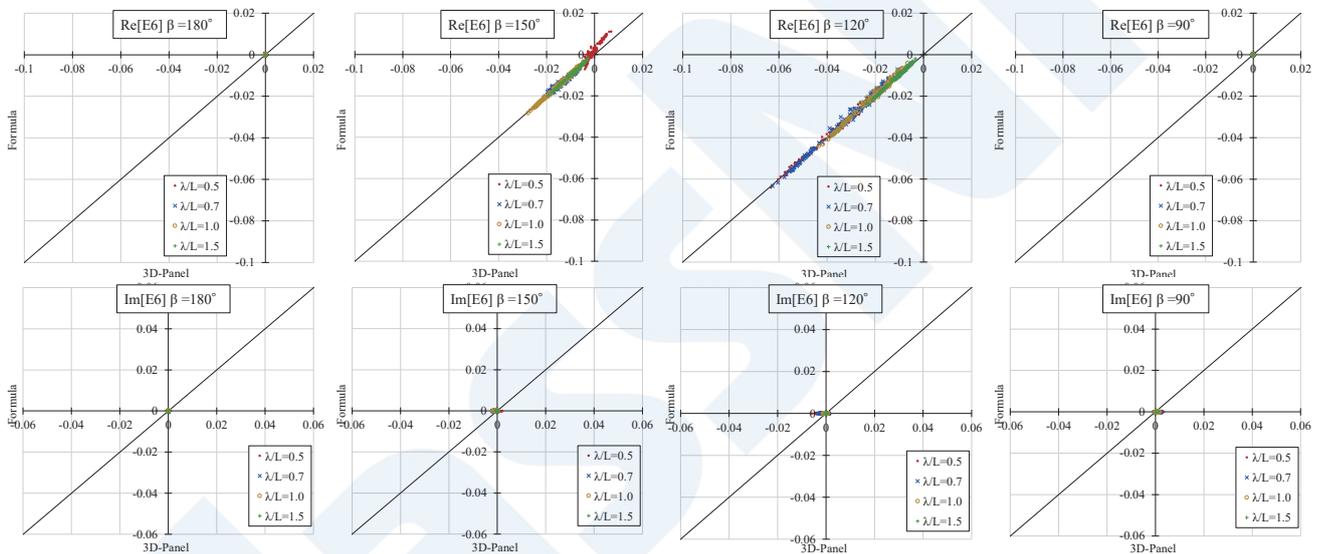


図7 Comparison of \bar{E}_6^{FK} between proposed formula and numerical calculation for target ships.

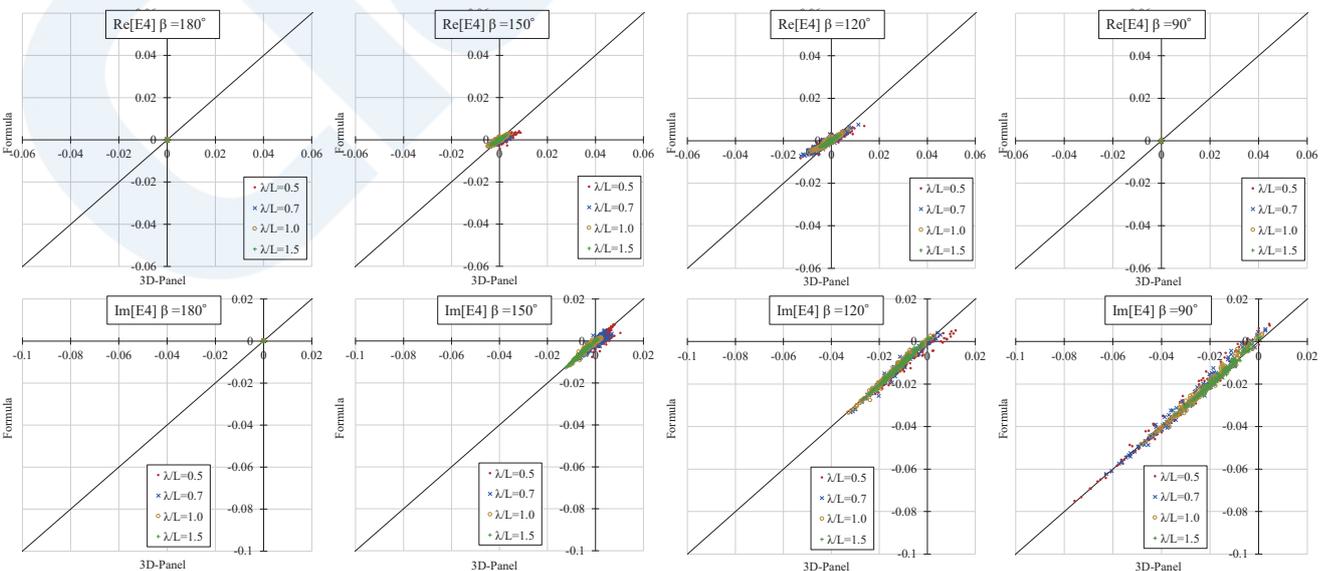


図8 Comparison of \bar{E}_4^{FK} between proposed formula and numerical calculation for target ships.

